數學傳播 48卷1期, pp. 54-65

以不同方式探討凸多邊形面積型式

柯宏源

一、前言

本篇文章在探討一給定其中 $n-1$ 個邊與其所夾出 $n-2$ 個角的凸 n 邊形所對應的面積一般式。其靈感源自於學科能力競賽的題目:

> 若五邊形 $ABCDE$ 滿足 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$, $\overline{CD}=4$, $\overline{DE}=2$, $\overline{EA}=4+2\sqrt{3}$, 及 $\angle A=90°$, $\angle B=120°$, $\angle C=120°$, $\angle D=150°$, $\angle E=60°$, 則此五邊形 $ABCDE$ 的面積爲何?

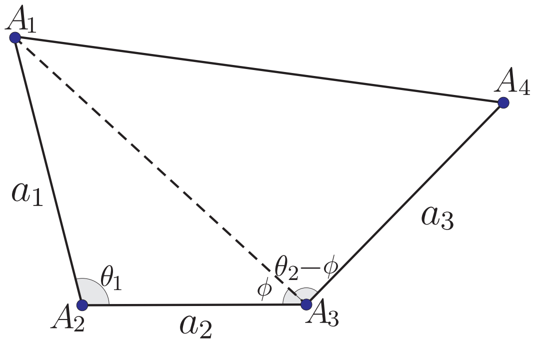
當初嘗試將 $\overline{EA}$ 線段分解成 4 與 $2\sqrt{3}$ 將五邊形看成兩個四邊形做處理, 最後竟意外得出一個漂亮的四邊形面積公式, 而嘗試將其推廣至五邊形甚至是多邊形時, 觀察出凸多邊形的遞迴關係式, 進而猜測其一般式並分別利用分割法與座標法驗證其正確性, 雖然處理過程繁雜, 但結果與猜測一致!

後來上網查資料時發現此公式已於 1963 年被 Lopshits 所提出, 不過並沒有查到相關的證明手法。在此提供兩種不同的證明思路供各位參考, 現在就讓我們推開幾何世界的美妙大門吧!

二、本文

性質1: 給定一凸 n 邊形, 其各頂點依序爲 A_1、A_2、...、A_n, 其中 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\cdots$、$\overline{A_{n-1}A_n}$ 分別爲 a_1、a_2、$\cdots$ 、a_{n-1}, $\angle A_2$、$\angle A_3$、$\cdots$ 、$\angle A_{n-1}$ 分別爲 θ_1、θ_2、$\cdots$ 、θ_{n-2}, 如圖一的四邊形。連接 $\overline{A_1A_3}$, 設 $\angle A_1A_3A_2=\phi$、$\overline{A_1A_3}=x$, 則:

$$\begin{cases}\sin\phi=\dfrac{a_1\sin\theta_1}{x},\\ \cos\phi=\dfrac{a_2-a_1\cos\theta_1}{x}.\end{cases}\tag{1}$$



圖一: 給定條件的四邊形

證明: 對於 $\triangle A_1A_2A_3$, 由正弦定理知:

$$\frac{x}{\sin\theta_1}=\frac{a_1}{\sin\phi}\Longrightarrow\sin\phi=\frac{a_1\sin\theta_1}{x},$$

又由餘弦定理知:

$$\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{a_1^2+a_2^2-x^2}{2a_1a_2}\Longrightarrow x^2=a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\theta_1,\\[2ex]\cos\phi=\dfrac{a_2^2+x^2-a_1^2}{2a_2x}.\end{cases}$$

將上式代入下式中得:

$$\cos\phi=\frac{a_2-a_1\cos\theta_1}{x}.$$

故

$$\begin{cases}\sin\phi=\dfrac{a_1\sin\theta_1}{x},\\[2ex]\cos\phi=\dfrac{a_2-a_1\cos\theta_1}{x}.\end{cases}$$

得證。 □

性質 2: 給定一凸 n 邊形, 其各頂點依序為 $A_1(x_1,y_1)$、$A_2(x_2,y_2)$、$\cdots$、$A_n(x_n,y_n)$, 則有

$$S(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_1\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y_1\end{vmatrix},\qquad(2)$$

即為測量師公式, 詳細證明見參考文獻 [1]。

以下將利用上述兩性質以「分割法」與「座標法」來探討「給定一凸 n 邊形, 其各頂點依序爲 A_1、A_2、$\cdots$、A_n, 其中 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\cdots$、$\overline{A_{n-1}A_n}$ 分別爲 a_1、a_2、$\cdots$、a_{n-1}, $\angle A_2$、$\angle A_3$、$\cdots$、$\angle A_{n-1}$ 分別爲 θ_1、θ_2、$\cdots$、θ_{n-2}」的面積形式。

(一) 分割法

(1) **凸四邊形** ($n=4$)

連接 $\overline{A_1A_3}$, 設 $\angle A_1A_3A_2=\phi$、$\overline{A_1A_3}=x$, 將四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 分割成三角形 $A_1A_2A_3$ 加上三角形 $A_3A_4A_1$, 因此有:

$$\begin{aligned}S(A_1A_2A_3A_4)&=S(A_1A_2A_3)+S(A_3A_4A_1)\\&=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1+\frac{1}{2}xa_3\sin(\theta_2-\phi)\\&=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1+\frac{1}{2}xa_3(\sin\theta_2\cos\phi-\sin\phi\cos\theta_2).\end{aligned}$$

利用性質 1 可得:

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1+\frac{1}{2}xa_3\Big(\sin\theta_2\frac{a_2-a_1\cos\theta_1}{x}-\frac{a_1\sin\theta_1}{x}\cos\theta_2\Big)\\&=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1+\frac{1}{2}a_2a_3\sin\theta_2-\frac{1}{2}a_1a_3\sin(\theta_1+\theta_2),\end{aligned}$$

故:

$$S(A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1+\frac{1}{2}a_2a_3\sin\theta_2-\frac{1}{2}a_1a_3\sin(\theta_1+\theta_2). \tag{3}$$

(2) **凸五邊形** ($n=5$)

仿凸四邊形的手法, 連接 $\overline{A_1A_3}$, 設 $\angle A_1A_3A_2=\phi$、$\overline{A_1A_3}=x$, 將五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 分割成三角形 $A_1A_2A_3$ 加上四邊形 $A_3A_4A_5A_1$, 因此有:

$$S(A_1A_2A_3A_4A_5)=S(A_1A_2A_3)+S(A_3A_4A_5A_1).$$

又由 (3) 式有:

$$S(A_3A_4A_5A_1)=\frac{1}{2}xa_3\sin(\theta_2-\phi)+\frac{1}{2}a_3a_4\sin\theta_3-\frac{1}{2}xa_4\sin(\theta_2+\theta_3-\phi).$$

將其差角展開再將 (1) 式代入化簡得面積公式:

$$\begin{aligned}S(A_1A_2A_3A_4A_5)&=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1+S(A_3A_4A_5A_1)\\&=\frac{1}{2}[a_1a_2\sin\theta_1+a_2a_3\sin\theta_2+a_3a_4\sin\theta_3-a_1a_3\sin(\theta_1+\theta_2)\\&\quad-a_2a_4\sin(\theta_2+\theta_3)+a_1a_4\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)].\end{aligned} \tag{4}$$

觀察 (3) 式、(4) 式會發現面積公式似乎遵循著某種規則:「相鄰的兩邊之乘積乘上夾角正弦值−間隔一條邊的兩邊之乘積乘上所圍夾角和的正弦值+間隔二條邊的兩邊之乘積乘上所圍夾角和的正弦值 $\cdots\cdots$ 」依此類推, 因此我大膽假設凸 n 邊形之面積一般式爲:

$$S(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{2}\sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,n-1\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}a_ia_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta_k\Big).$$

另外在推導 (3) 式、(4) 式的過程中都採用「分割法」處理, 由此可見面積公式存在遞迴關係, 因此以下將以「數學歸納法」證明凸 n 邊形之面積一般式。

(3) **凸 n 邊形**

證明凸 n 邊形之面積一般式爲:

$$S(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{2}\sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,n-1\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}a_ia_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta_k\Big).$$

1. **證明當 $n=3$ 時原式成立**:

由正弦定理有

$$S(A_1A_2A_3)=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1=\frac{1}{2}\sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,n-1\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}a_ia_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta_k\Big).$$

故當 $n=3$ 時原式成立。

2. **設當 $n=t-1$ $(t>3\wedge t\in\mathbb{N})$ 時原式成立, 證明 $n=t$ 時原式亦成立**:

連 $\overline{A_1A_3}$, 將凸 t 邊形切成一個三角形加一個凸 $t-1$ 邊形。因此有:

$$\begin{aligned}S(A_1A_2\cdots A_t)&=S(A_1A_2A_3)+S(A_1A_3A_4\cdots A_{t-1})\\&=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,t-2\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}b_ib_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta'_k\Big),\end{aligned}$$

其中 $b_1=x$, b_2、b_3、$\cdots$、b_{t-2} 依序等於 a_3、a_4、$\cdots$、a_{t-1}, 而 $\theta'_1=\theta_2-\phi$, θ'_2、θ'_3、$\cdots$、θ'_{t-3} 依序等於 θ_3、θ_4、$\cdots$、θ_{t-2}, 其中 $\phi=\angle A_1A_3A_2$。化簡得:

$$\begin{aligned}&S(A_1A_2A_3)+S(A_1A_3A_4\cdots A_{t-1})\\&=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j\in\{2,\ldots,t-2\}}(-1)^{2-j}b_1b_j\sin\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\theta'_k\Big)\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i、j\in\{2,\ldots,t-2\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}b_ib_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta'_k\Big),\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{j\in\{2,\ldots,t-2\}}(-1)^{2-j}b_1b_j\sin\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\theta'_k\Big)\\
&=\frac{1}{2}b_1\sum_{j\in\{2,\ldots,t-2\}}(-1)^{j}b_j\sin\Big(\theta'_1+\sum_{k=2}^{j-1}\theta'_k\Big)\\
&=\frac{1}{2}b_1\sum_{j\in\{2,\ldots,t-2\}}(-1)^{j}b_j\sin\Big(-\phi+\sum_{k=2}^{j}\theta_k\Big)\\
&=\frac{1}{2}x\sum_{j\in\{3,\ldots,t-1\}}(-1)^{j+1}a_j\Bigg[\sin\Big(\sum_{k=2}^{j-1}\theta_k\Big)\frac{a_2-a_1\cos\theta_1}{x}-\frac{a_1\sin\theta_1}{x}\cos\Big(\sum_{k=2}^{j-1}\theta_k\Big)\Bigg]\\
&=\frac{1}{2}\sum_{j\in\{3,\ldots,t-1\}}(-1)^{j}a_j\Bigg[\sin\Big(\sum_{k=2}^{j-1}\theta_k\Big)a_1\cos\theta_1+a_1\sin\theta_1\cos\Big(\sum_{k=2}^{j-1}\theta_k)\Bigg]\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{j\in\{3,\ldots,t-1\}}(-1)^{j+1}a_2a_j\sin\Big(\sum_{k=2}^{j-1}\theta_k\Big)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{j\in\{3,\ldots,t-1\}}(-1)^{j}a_1a_j\sin\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\theta_k\Big)+\frac{1}{2}\sum_{j\in\{3,\ldots,t-1\}}(-1)^{j+1}a_2a_j\sin\Big(\sum_{k=2}^{j-1}\theta_k\Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad &S(A_1A_2A_3)+S(A_1A_3A_4\cdots A_{t-1})\\
&=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j\in\{3,\ldots,t-1\}}(-1)^{j}a_1a_j\sin\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\theta_k\Big)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{j\in\{3,\ldots,t-1\}}(-1)^{j+1}a_2a_j\sin\Big(\sum_{k=2}^{j-1}\theta_k\Big)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i、j\in\{3,\ldots,t-1\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}a_ia_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta_k\Big)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,t-1\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}a_ia_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta_k\Big),
\end{aligned}$$

即　$S(A_1A_2\cdots A_t)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,t-1\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}a_ia_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta_k\Big).$

故當 $n=t-1$ $(t>3\wedge t\in\mathbb{N})$ 原式成立時, 則 $n=t$ 時原式亦成立。

3. **由數學歸納法得知**:

$$\forall\, n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}, \quad S(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{2}\sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,n-1\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}a_ia_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta_k\Big)$$

皆成立。

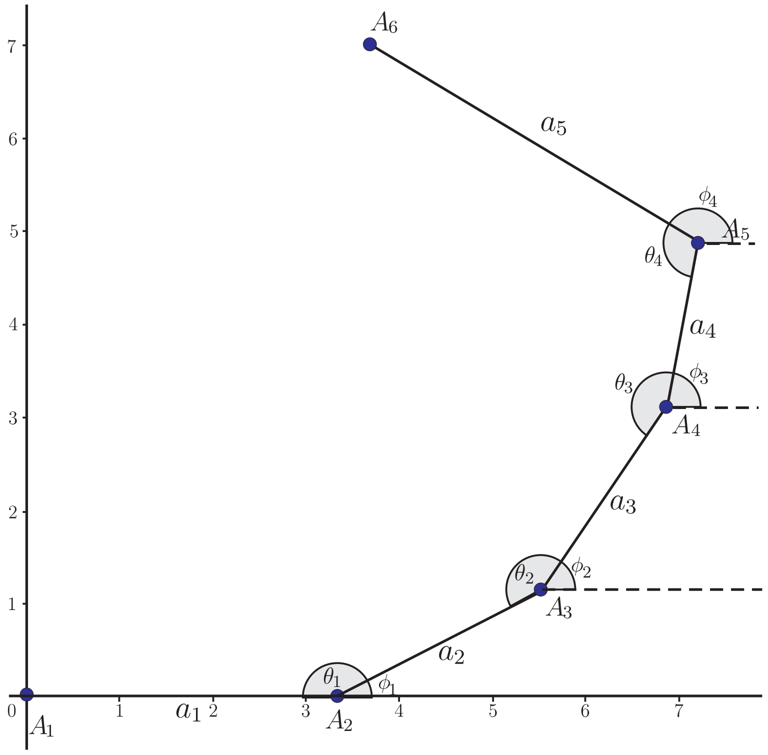
故得證:

$$S(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{2}\sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,n-1\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}a_ia_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta_k\Big). \tag{5}$$

此凸 n 邊形公式的使用條件, 是在給定 $n-1$ 條邊長與這 $n-1$ 條邊長所夾出的 $n-2$ 個角的情況下, 但爲何給定這些條件就能夠決定唯一的圖形面積呢?

這是因爲可以利用這些條件在座標軸上描繪出所有頂點的座標, 因此會決定唯一的圖形面積。而既然可以找出所有頂點的座標, 那麼是否可以用已知頂點座標求面積的「測量師公式」推導出上述的 (5) 式呢?

(二) 座標法



圖二: 凸 n 邊形各頂點、邊長及角度示意圖

(1) 求得各頂點座標之一般式

令 $A_1(0,0)$ 並設 $A_k(x_k, y_k)$。將 $A_k(x_k, y_k)$ 視爲新原點, 則 $A_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$ 即爲 $(a_k, 0)$ 繞著 A_k 順時針旋轉 ϕ_{k-1} 後再加上原來 A_k 的座標。

因此利用旋轉矩陣可得出以下遞迴關係式:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi_{k-1} & -\sin\phi_{k-1} \\ \sin\phi_{k-1} & \cos\phi_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_{k-1}a_k + x_k \\ \sin\phi_{k-1}a_k + y_k \end{bmatrix},$$

而其中 $\phi_1 = 180^\circ - \theta_1$, $\phi_k = 180^\circ + \phi_{k-1} - \theta_k$, 如圖二, 再利用疊代法:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 180^\circ - \theta_1, \\ \phi_2 &= 180^\circ + \phi_1 - \theta_2 = 360^\circ - (\theta_1 + \theta_2), \\ \phi_3 &= 180^\circ + \phi_2 - \theta_3 = 540^\circ - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \qquad \cdots\cdots . \end{aligned}$$

因此有 $\phi_k = k\pi - \sum\limits_{t=1}^{k} \theta_t$。

$$\Longrightarrow \begin{cases} \cos\phi_k = \cos\Big(k\pi - \sum\limits_{t=1}^{k}\theta_t\Big) = (-1)^k \cos\Big(\sum\limits_{t=1}^{k}\theta_t\Big) \\ \sin\phi_k = \sin\Big(k\pi - \sum\limits_{t=1}^{k}\theta_t\Big) = (-1)^{k+1} \sin\Big(\sum\limits_{t=1}^{k}\theta_t\Big) \end{cases},$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_{k-1}a_k + x_k \\ \sin\phi_{k-1}a_k + y_k \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} (-1)^{k-1}\cos\Big(\sum\limits_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big)a_k + x_k \\ (-1)^{k}\sin\Big(\sum\limits_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big)a_k + y_k \end{vmatrix}.$$

又 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 同樣的利用疊代法可以得出:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 - a_2\cos\theta_1 + a_3\cos(\theta_1+\theta_2) - \cdots + (-1)^k\cos\Big(\sum\limits_{t=1}^{k-2}\theta_t\Big)a_{k-1} \\ a_2\sin\theta_1 - a_3\sin(\theta_1+\theta_2) + \cdots + (-1)^{k+1}\sin\Big(\sum\limits_{t=1}^{k-2}\theta_t\Big)a_{k-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 - \sum\limits_{p=2}^{k-1} a_p(-1)^p\cos\Big(\sum\limits_{t=1}^{p-1}\theta_t\Big) \\ \sum\limits_{p=2}^{k-1} a_p(-1)^p\sin\Big(\sum\limits_{t=1}^{p-1}\theta_t\Big) \end{bmatrix} \qquad (\forall\ k \geq 3), \end{aligned} \tag{6}$$

因此求得頂點之一般式:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (k=1),$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (k=2),$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - \sum_{p=2}^{k-1} a_p(-1)^p \cos\Big(\sum_{t=1}^{p-1}\theta_t\Big) \\ \sum_{p=2}^{k-1} a_p(-1)^p \sin\Big(\sum_{t=1}^{p-1}\theta_t\Big) \end{bmatrix}, \qquad (\forall\ k \geq 3).$$

(2) **證明**

$$x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1} = a_k(-1)^k \sum_{p=1}^{k-1} [a_p(-1)^{p+1} \sin\Big(\sum_{t=p}^{k-1}\theta_t\Big) \quad (\forall\ k \geq 2).$$

由 (6) 知:

$$\begin{aligned}
& x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1} \\
&= x_k\left((-1)^k \sin\Big(\sum_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big)a_k + y_k\right) - y_k\left((-1)^{k-1}\cos\Big(\sum_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big)a_k + x_k\right) \\
&= x_k a_k(-1)^k \sin\Big(\sum_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big) + y_k a_k(-1)^k \cos\Big(\sum_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big) \\
&= a_k(-1)^k\left[\left(a_1 - \sum_{p=2}^{k-1} a_p(-1)^p \cos\Big(\sum_{t=1}^{p-1}\theta_t\Big)\right)\sin\Big(\sum_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\sum_{p=2}^{k-1} a_p(-1)^p \sin\Big(\sum_{t=1}^{p-1}\theta_t\Big)\right)\cos\Big(\sum_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big)\right] \\
&= a_k(-1)^k [a_1 \sin\Big(\sum_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big) \\
&\quad + \sum_{p=2}^{k-1}\left[a_p(-1)^p \sin\Big(\sum_{t=1}^{p-1}\theta_t\Big)\cos\Big(\sum_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big) - a_p(-1)^p\cos\Big(\sum_{t=1}^{p-1}\theta_t\Big)\sin\Big(\sum_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big)\right] \\
&= a_k(-1)^k\left[a_1 \sin\Big(\sum_{t=1}^{k-1}\theta_t\Big)\right] + \sum_{p=2}^{k-1}\left[a_p(-1)^{p+1}\sin\Big(\sum_{t=p}^{k-1}\theta_t\Big)\right] \\
&= a_k(-1)^k \sum_{p=1}^{k-1}\left[a_p(-1)^{p+1}\sin\Big(\sum_{t=p}^{k-1}\theta_t\Big)\right].
\end{aligned}$$

(3) **利用測量師公式求得面積**

由 (2) 式有:

$$S(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2\cdots x_n & x_1 \\ y_1 & y_2\cdots y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+(x_ny_1-x_1y_n)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[0+(a_1a_2\sin\theta_1)+\cdots+a_{n-1}(-1)^{n-1}\sum_{p=1}^{n-2}\left[a_p(-1)^{p+1}\sin\Big(\sum_{t=p}^{n-2}\theta_t\Big)\right]+0\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,n-1\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}a_ia_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta_k\Big),$$

與分割法所處理出的 (5) 式結果相符！

三、結論

(1) 凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 面積公式:

$$S(A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1+\frac{1}{2}a_2a_3\sin\theta_2-\frac{1}{2}a_1a_3\sin(\theta_1+\theta_2).$$

(2) 凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 面積公式:

$$\begin{aligned}S(A_1A_2A_3A_4A_5)&=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\theta_1+\frac{1}{2}a_2a_3\sin\theta_2+\frac{1}{2}a_3a_4\sin\theta_3\\&-\frac{1}{2}a_1a_3\sin(\theta_1+\theta_2)-\frac{1}{2}a_2a_4\sin(\theta_2+\theta_3)\\&+\frac{1}{2}a_1a_4\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3).\end{aligned}$$

(3) 凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 面積公式:

$$S(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{2}\sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,n-1\}\wedge i<j}(-1)^{i-j+1}a_ia_j\sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\theta_k\Big).$$

(4) 利用分割法與座標法, 皆可證得相同凸多邊形面積一般式 (5)。

回歸原先的題目:

> 若五邊形 $ABCDE$ 滿足 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$, $\overline{CD}=4$, $\overline{DE}=2$, $\overline{EA}=4+2\sqrt{3}$, 及 $\angle A=90^\circ$, $\angle B=120^\circ$, $\angle C=120^\circ$, $\angle D=150^\circ$, $\angle E=60^\circ$, 則此五邊形 $ABCDE$ 的面積為何?

爲求方便計算因此選定 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$ 與 $\angle B$、$\angle C$、$\angle D$, 因此有:

$$\begin{aligned}S(ABCDE) =& \frac{1}{2}[2\times 2\sqrt{3}\times\sin 120^\circ + 2\sqrt{3}\times 4\times\sin 120^\circ + 4\times 2\times\sin 150^\circ \\ &- 2\times 4\times\sin 240^\circ - 2\sqrt{3}\times 2\times\sin 270^\circ + 2\times 2\times\sin 390^\circ] \\ =& 12 + 4\sqrt{3},\end{aligned}$$

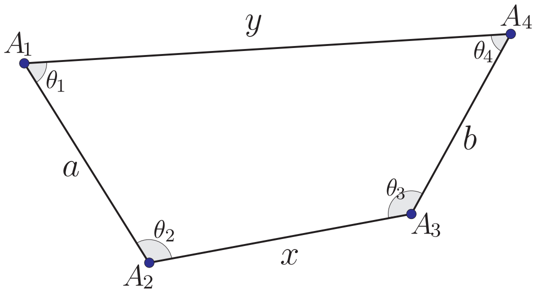
與答案相符!

四、討論

藉由前文給出的面積公式, 我們可以推導出性質 3。

性質3: 已知一凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 並給定 $\overline{A_1A_2} = a$、$\overline{A_3A_4} = b$, $\angle A_1$、$\angle A_2$、$\angle A_3$、$\angle A_4$ 分別爲 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4, 如圖三, 則有:

$$\begin{aligned}S(A_1A_2A_3A_4) =& \frac{1}{2(\sin\theta_1\sin\theta_3 - \sin\theta_2\sin\theta_4)} \\ &\times \{a^2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin(\theta_2+\theta_3) + b^2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin(\theta_1+\theta_4) \\ &+ ab\sin\theta_2\sin\theta_4[\sin(\theta_1+\theta_4) + \sin(\theta_2+\theta_3)]\}.\end{aligned}$$



圖三

證明: 設 $\overline{A_2A_3} = x$、$\overline{A_1A_4} = y$, 因此有

$$S(A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{2}ax\sin\theta_2 + \frac{1}{2}by\sin\theta_4.$$

選定 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_4}$、$\angle A_2$、$\angle A_3$ 代入面積公式:

$$S(A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{2}ax\sin\theta_2 + \frac{1}{2}bx\sin\theta_3 - \frac{1}{2}ab\sin(\theta_2+\theta_3).$$

選定 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_3A_4}$、$\angle A_1$、$\angle A_4$ 代入面積公式:

$$S(A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{2}ay\sin\theta_1 + \frac{1}{2}by\sin\theta_4 - \frac{1}{2}ab\sin(\theta_1+\theta_4).$$

將三式聯立可得:

$$\begin{cases} x\sin\theta_3 - y\sin\theta_4 = a\sin(\theta_2+\theta_3), \\ y\sin\theta_1 - x\sin\theta_2 = b\sin(\theta_1+\theta_4). \end{cases}$$

解得:

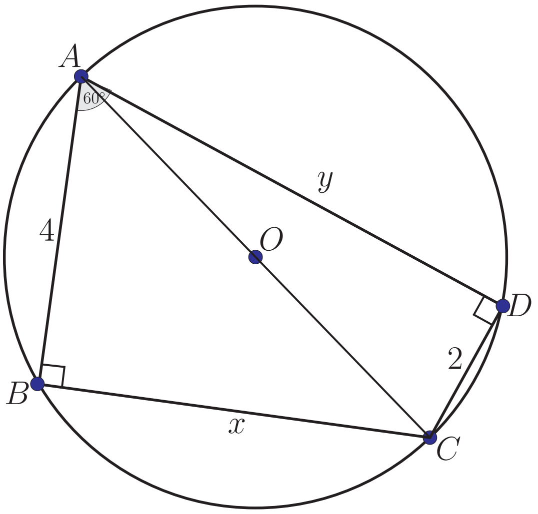
$$\begin{cases} x = \dfrac{a\sin\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3)+b\sin\theta_4\sin(\theta_1+\theta_4)}{\sin\theta_1\sin\theta_3-\sin\theta_2\sin\theta_4}, \\ y = \dfrac{a\sin\theta_2\sin(\theta_2+\theta_3)+b\sin\theta_3\sin(\theta_1+\theta_4)}{\sin\theta_1\sin\theta_3-\sin\theta_2\sin\theta_4}. \end{cases}$$

再將 x、y 代入, 便可得到得證:

$$\begin{aligned} S(A_1A_2A_3A_4) = & \frac{1}{2(\sin\theta_1\sin\theta_3-\sin\theta_2\sin\theta_4)} \\ & \times\{a^2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin(\theta_2+\theta_3)+b^2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin(\theta_1+\theta_4) \\ & + ab\sin\theta_2\sin\theta_4[\sin(\theta_1+\theta_4)+\sin(\theta_2+\theta_3)]\}. \end{aligned}$$

我們將以 2015 年學科能力競賽題目爲例, 說明前文面積公式和性質 3 的使用時機。

已知一四邊形 $ABCD$ 中, $\angle A=60^\circ$、$\angle B=\angle D=90^\circ$, $\overline{AB}=4$、$\overline{CD}=2$, 如圖四, 求四邊形 $ABCD$ 面積?



圖四

法一: 利用前文面積公式 (5)

設 $\overline{BC}=x$、$\overline{AD}=y$, 則 $S(ABCD)=S(ABC)+S(CDA)=2x+y$ 選定 $\overline{BC}$、

$\overline{CD}$、$\overline{DA}$、$\angle C$、$\angle D$代入面積公式:

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(2y + 2x\sin 120^\circ - xy\sin 210^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + y + \frac{1}{4}xy$$

因此

$$2x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + y + \frac{1}{4}xy \Rightarrow y = 8 - 2\sqrt{3}$$

再選定 $\overline{BA}$、$\overline{AD}$、$\overline{DC}$、$\angle A$、$\angle D$ 代入面積公式:

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(4y\sin 60^\circ + 2y - 2\times 4\times \sin 150^\circ) = 6\sqrt{3}.$$

法二: 利用性質 3

將 $a = 4$、$b = 2$、$\theta_1 = 90^\circ$、$\theta_2 = 120^\circ$、$\theta_3 = 90^\circ$、$\theta_4 = 60^\circ$ 代入, 亦可得 $S(ABCD) = 6\sqrt{3}$。

由上述討論可以發現, 藉由多次的「選定」不同的邊、角, 利用一多邊形面積不會改變的特性, 可以有效地處理給定特殊條件之多邊形的特定邊長與其面積, 並且亦可給出公式型式。

雖然此面積公式已被 Lopshits 先一步提出, 不過本文利用了分割法與座標法的處理手法得證此公式。求面積的方法有十分多種, 例如: 三角形的海龍公式、四邊形的布雷特施奈德公式等等, 而這個公式可以透過「選定」, 來求得邊與面積。另外在條件充裕的情況下, 亦可選定不同的邊、角去驗證答案的正確性。由此可知, 此公式是一個有力的求面積公式。

特別感謝指導老師: 王鴻翔老師。

參考文獻

1. Albrecht Ludwig Friedrich Meister, *Generalia de genesi figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus*, 1769.
2. Abram Mironovich Lopshits, *Computation of Areas of Oriented Figures*, 1963.
3. 李輝濱。平面凸五邊形及凸六邊形面積的研究。數學傳播季刊, 36(4), 48-61, 2012。

—本文作者就讀於國立彰化高級中學—